Linjära ekvationssystem – tips och hjälp

Ett ekvationssystem (på kursen matematik 2a) består av två ekvationer med två obekanta (dvs x och y). X har samma värde i båda ekvationerna och likadant har Y samma (men nästan alltid ett annat) värde i båda ekvationerna. Värdena på x och y är okända och syftet med att lösa ekvationssystemet är att få reda på vad värdena för x och y är. De två ekvationerna kan ha sitt ursprung i något form av problem, tex ett geometriskt problem, men det måste inte vara så. Ekvationssystemet ä då ett ”problem” i sig.

Ekvationssystem löser vi med hjälp av en eller två olika metoder. Dessa två metoder heter:

1. Substitutionsmetoden (utbytesmetoden)
2. Eliminations- eller additionsmetoden (utraderingsmetoden)

Syftet med båda metoderna är att ”få bort” den ena av de två obekanta (x eller y). Då återstår en ”vanlig” ekvation med bara en obekant (x eller y) som är lätt att lösa. Sedan kan man med denna lösning även hitta värdet på den andra obekanta.

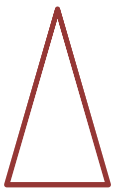
Här är ett geometriskt problem:

En rektangel och en triangel har lika långa omkretsar. Deras omkretsar är båda 100 cm. Triangelns långa sida är 10 cm längre än kvadratens sida.Triangelns korta sida och rektangelns korta sida är lika långa. Hur långa är sidorna i kvadraten och triangeln?

A) Rita en bild till allt som går!

Sidans längd = y

Sidans längd = x



Sidans längd = x + 10

Sidans längd = y

B) Definiera i meningar x och y!
x är längden på kvadratens sida, y är omkretsen

C) Formulera ekvationerna!

Ekvation 1: $x + x + y + y = 100$ (rektangelns långa sida + korta sida + långa sida + korta sida = omkretsen = 100)

Ekvation 2: $x + 10 + x + 10 + y = 100$ (triangelns långa sida + långa sida + korta sida = omkretsen = 100)

D) Förenkla ekvationerna!

Ekvation I: $2x + 2y = 100$

Ekvation II: $2x + y = 80$ (omkretsen 100 – 10 – 10)

E) Skriv upp ekvationssystemet!

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ 2x + y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

Har vi ett ekvationssysem likt det ovan kan vi nu lösa det med antingen substitutionsmetoden eller additionsmetoden (eliminationsmetoden) eller båda.

Vilken metod är enklast att välja i detta fall? Vi ser att både ekvation I och II innehåller termen 2x. Då kan additionsmetoden (eliminationsmetoden) vara enklast.

Genom att "dra bort" hela ekvation II från ekvation I, så "försvinner" termen 2x!

$$\begin{array}{rrcr} & 2x + 2y & = & 100 \\ - & (2x + y & = & 80) \\ \hline & y & = & 20 \end{array}$$

Vi får direkt veta att y = 20. Genom att ersätta y med värdet 20 i ekvation I så får vi:

® $2x + 2 \cdot 20 = 100$

$2x = 100 - 40$

$2x = 60$

$x = 30$

TIPS: vid addition (elimination) se till att ha x stående över x och y stående över y och siffror stående över siffror i de två ekvationerna.
TIPS: vid addition (elimination) se till att ha lika många x i båda ekvationerna ELLER att ha lika många y i båda ekvationerna. ALTERNATIVT att ha lika många x som –x (y som –y) i de båda olika ekvationerna.

Hade vi valt substitutionsmetoden hade vi gjort så här:

A) Skriv om båda ekvationerna så att de är lika med 0!

$$2x + 2y - 100 = 0$$
$$2x + y - 80 = 0$$

B) Sätt ekvationerna lika med varandra!

$$2x + 2y - 100 = 2x + y - 80$$

C) Förenkla!

$$2x - 2x + 2y - y = -80 + 100$$
$$y = 20$$

Då kan vi sätta in y = 20 i ekvation I på samma sätt som ovan ® och ger x = 30

TIPS: Sätt båda ekvationerna lika med noll, och sedan ena ekvationen lika med den andra.

Ett alternativt sätt att utföra substitutionsmetoden är detta:

A) Sätt x = resten av ekvationens uttryck i ekvation I eller ekvation II

$2x + 2y = 100$ (Ekvation I)
$2x = 100 – 2y$
$x = 50 – y$ (alla termer dividerade med 2)

B) Ersätt x i ekvation II (om du valde att arbeta med ekvation I i steg A) eller ersätt x i ekvation I (om du valde att arbeta med ekvation II i steg A) med uttrycket efter likamedtexknet i steg A.

$2*(50 – y) + y = 80$

C) Förenkla det i steg B.

$100 – 2y + y = 80$
$– y = – 20$
$y = 20$

Genom att sätta in y = 20 i ekvation I på samma sätt som ovan ® och ger x = 30

Det går också förstås att göra steg A – C där man väljer y = resten av ekvationens uttryck OSV och gör ”tvärtom” även fortsättningsvis.

TIPS: Sätt x = resten av ekvationen ELLER y = resten av ekvationen och byt ut (substituera) variabeln i den andra ekvationen i systemet.

Additionsmetoden kan givetvis utföras genom att uppnå samma antal y i båda ekvationerna på samma sätt som vi hade samma antal x (från början) i de båda ekvationerna i exemplet:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ 2x + y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

Om vi multiplicerar ekvation II med –2 så får vi:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ -4x - 2y = -160 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

Därefter adderar vi båda ekvationerna och eliminerar alla y:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 100 \\ \underline{-4x - 2y = -160} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$
$$-2x \qquad = -60$$

$–2x = –60$
$–x = –30$ (båda sidor dividerade med 2)
$x = 30$ (båda sidor multiplicerade med –1)

Sedan får man veta y genom att byta ut x mot 30 i till exempel ekvation I:

$2*30 + 2y = 100$
$60 + 2y = 100$
$2y = 40$
$y = 20$

Om vi har ett ekvationssystem som är lite mer krångligt, tex detta:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 60 \\ 3x + y = 55 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

Anta att vi väljer additionsmetoden. Nu har vi inte lika många x i båda ekvationerna och inte har vi heller lika många y i båda ekvationerna. Om vi fokuserar på x så kan vi uppnå detta ungefär på samma sätt som vid bråkräkning:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Man förlänger bråken så att man får samma gemensamma nämnare, i detta fall 6.

Så om vi ”förlänger” ekvation I med 3, dvs multiplicerar alla termer med 3 och vi ”förlänger” ekvation II med 2, dvs multiplicerar alla termer med 2, så får vi:

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 9y = 180 \\ 6x + 2y = 110 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

Observera alltså att även högra ledet har multiplicerats. Nu kan vi dra av ekvation II från ekvation I eftersom vi har lika många x i båda ekvationerna, nämligen 6x.

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 180 \\ \underline{6x + 2y = 110} \\ 7y = 70 \end{array} \quad \mathrm{II}$$

$7y = 70$
$y = 10$ (dividera båda sidor med 7

Genom att stoppa in y=10 i ekvation II får vi:

$6x + 2*10 = 110$
$6x + 20 = 110$
$6x = 90$ (dra av 20 på båda sidor)
$x = 15$ (dividrea med 6 på båda sidor)