Härledning av trigonometriska ettan ur avståndsformeln

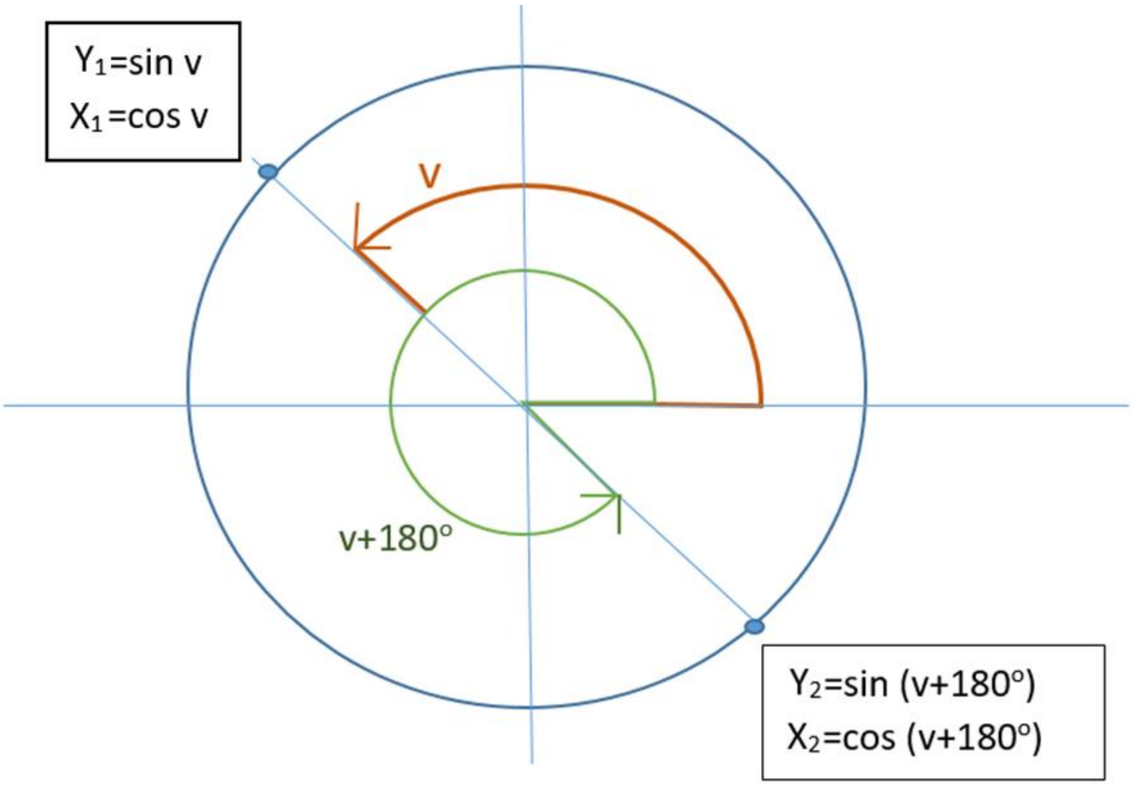
Trigonometriska ettan säger att

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Detta är en likhet som saknar geometrisk betydelse vanligtvis, så nedan gör vi ett försök att bevisa denna formel genom att använda geometri och den välanvända formeln för avstånd:

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Betrakta två godtyckligt valda punkter på enhetscirkeln (en cirkel med radien 1):



Vi vet att avståndet mellan punkterna är 2 eftersom avståndet är diametern som är två gånger radiens längd som är 2*1=2. Om vi ersätter x- och y-koordinaterna med uttrycken för sinus och cosinus så skriver vi avståndsformeln som:

$$2 = \sqrt{(\sin v - \sin(v + 180^o))^2 + (\cos v - cos(v + 180^o))^2}$$

Kvadrera båda sidor

$$4 = (\sin v - sin(v + 180^o))^2 + (\cos v - \cos(v + 180^o))^2$$

Alternativt ersätter vi sin (v + 180°) = – sin v och cos (v + 180°) = – cos v

Annars utnyttjas de två additionsreglerna för sinus och cosinus:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$4 = (\sin v - \sin v \cos 180^o + \cos v \sin 180^o)^2 +$$

$$+ (\cos v - \cos v \cos 180^o + \sin v \sin 180^o)^2$$

Men sin 180^o = 0 och cos 180^0 = -1, så uttrycket förenklas till följande:

$$4 = (\sin v + \sin v)^2 + (\cos v + \cos v)^2$$

$$4 = (2\sin v)^2 + (2\cos v)^2$$

$$4 = 4\,sin^2\,x + 4\,cos^2\,x$$

$$1 = sin^2\,x + cos^2\,x$$

Sista raden är den trigonometriska ettan