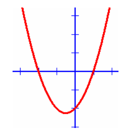
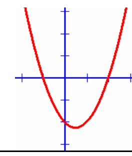
Jednačine(jednadžbe) sa apsolutnim vrijednostima

ZADACI

1. Riješiti jednačinu: $\left|x^2+x-2\right|+\left|x^2-x-2\right|=2$

Rješenje:

Ispitajmo funkciju: $f_1(x)=x^2+x-2 \Rightarrow \left.\begin{cases} a>0 \\ D=9>0 \\ x_1=-2 \vee x_2=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$  .

Ispitajmo funkciju: $f_2(x)=x^2-x-2 \Rightarrow \left.\begin{cases} a>0 \\ D=9>0 \\ x_1=-1 \vee x_2=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$  .

x	-∞ -2	-1	1	2	+∞
$f_1(x)$	+++++++++++++++0---0++++++++++++++++++++++++				
$f_2(x)$	++++++++++++++++++++++++++0---0+++++++++++++				
	$x\in(-\infty;-2]$	$x\in(-2;-1]$	$x\in(-1;1]$	$x\in(1;2]$	$x\in(2;+\infty)$

Ova se jednačina,dakle,mora posmatrati u pet podintervala:

$$(-\infty;-2]\cup(-2;-1]\cup(-1;1]\cup(1;2]\cup(2;+\infty)$$

1. $x\in(-\infty;-2]$ jednačina ima oblik: $x^2+x-2+x^2-x-2=2 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Kako nijedno ne pripada intervalu posmatranja ne može biti rješenje jednačine.

2. $x\in(-2;-1]$ jednačina ima oblik: $-x^2-x+2+x^2-x-2=2 \Leftrightarrow -2x=2 \Rightarrow x=-1$.

Kako pripada intervalu posmatranja jeste rješenje jednačine.

3. $x\in(-1;1]$ jednačina ima oblik: $-x^2-x+2-x^2+x+2=2 \Leftrightarrow -2x^2=-2 \Rightarrow x=\pm1$.

Kako x=1 pripada intervalu posmatranja jeste rješenje jednačine.

4. $x\in(1;2]$ jednačina ima oblik: $x^2+x-2-x^2+x+2=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.

Kako x=1 ne pripada intervalu posmatranja nije rješenje jednačine u ovom slučaju.

5. $x\in(2;+\infty)$ jednačina ima oblik: $x^2+x-2+x^2-x-2=2 \Leftrightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Kako nijedno ne pripada intervalu posmatranja ne može biti rješenje jednačine.

Konačno rješenje date jednačine je $x=-1 \vee x=1$

2.Riješiti jednačinu: $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

Rješenje:

Napravimo tablicu znaka izraza pod znakom apsolutne vrijednosti:

x	$-\infty$	-2	-1 $+\infty$
$x+2$	-------------------------	0+++++++++++++++++++++++	++++++++++++++++++++++++++++
$2^{x+1}-1$	-------------------------	-------------------------------------	0++++++++++++++++++++++++++++
	$x\in(-\infty;-2)$	$x\in[-2;-1)$	$x\in[-1;+\infty)$

1. $x\in(-\infty;-2)$ jednačina ima oblik:

$2^{-x-2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1\Leftrightarrow 2^{-x-2}=2\Rightarrow x=-3$ jeste rješenje date jednačine.

2. $x\in[-2;-1)$ jednačina ima oblik:

$2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1\Leftrightarrow 2^{x+2}=2\Rightarrow x=-1$ nije rješenje jednačine.

3. $x\in[-1;+\infty)$ jednačina ima oblik:

$2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1\Leftrightarrow 2^{x+2}=2^{x+2}\Rightarrow x\in[-1;+\infty)$.

Konačno,rješenje ove jednačine je $x=-3\vee x\in[-1;+\infty)$

3. Za koje $x\in R$ je : $y=\sqrt{\log\frac{2|x|-3}{|2-x|-1}}\in R$

Rješenje:

Funkcija će diti definirana,dakle, $y\in R$ ako je $\log\frac{2|x|-3}{|2-x|-1}\geq 0$.Treba riješiti ovu nejednačinu i imamo odgovor na zadatak.

$$\log\frac{2|x|-3}{|2-x|-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2|x|-3}{|2-x|-1}\geq 1\Leftrightarrow\frac{2|x|-3}{|2-x|-1}-1\geq 0\Leftrightarrow\frac{2|x|-3-|2-x|+1}{|2-x|-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2|x|-|2-x|-2}{|2-x|-1}\geq 0$$

x	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	-x	x	x
$\lvert 2-x\rvert$	2-x	2-x	-(2-x)
	$\frac{-2x-2+x-2}{2-x-1}\geq 0$ $\frac{-x-4}{1-x}\geq 0$	$\frac{2x-2+x-2}{2-x-1}\geq 0$ $\frac{3x-4}{1-x}\geq 0$	$\frac{2x+2-x-2}{-2+x-1}\geq 0$ $\frac{x}{x-3}\geq 0$
	Kako je za $x<0\Rightarrow 1-x>0$ to ostaje da mora biti $-x-4\geq 0\Rightarrow x\leq -4\Rightarrow x\in(-\infty;-4)$	$(3x-4\geq 0\wedge 1-x>0)\vee$ $(3x-4\leq 0\wedge 1-x<0)$ $\left(x\geq\frac{4}{3}\wedge x<1\right)\vee\left(x\leq\frac{4}{3}\wedge x>1\right)$ $x\in\left(1;\frac{4}{3}\right]$	Kako je x>0 to mora biti i x-3>0 dakle $x\in(3;+\infty)$
Konačno rješenje je $x\in(-\infty,-4)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup(3,+\infty)$			

4. Riješiti nejednačinu: $\dfrac{\left|1-|1-x|\right|-1}{\left|x-|x-2|\right|-2} \le 0$

Rješenje

x	$-\infty$ $\quad$ 1	$\quad$ 2	$+\infty$
$\|1-x\|$	1-x	-1+x	-1+x
$\|x-2\|$	-x+2	-x+2	x-2
	$\dfrac{\|1-1+x\|-1}{\|x+x-2\|-2} \le 0$ $\dfrac{\|x\|-1}{2\|x-1\|-2} \le 0$	$\dfrac{\|1+1-x\|-1}{\|x+x-2\|-2} \le 0$ $\dfrac{\|2-x\|-1}{\|2x-2\|-2} \le 0$	$\dfrac{\|1+1-x\|-1}{\|x-x+2\|-2} \le 0$ $\dfrac{\|2-x\|-1}{2-2} \le 0$
	Kako je za $x<1 \Rightarrow x-1<0$ to ostaje da mora biti $\dfrac{\|x\|-1}{-2x} \le 0 \Rightarrow$ $\dfrac{\|x\|-1}{x} \ge 0 \Rightarrow x \in [-1;0)$	Za $x \in [1;2)$ važi $\dfrac{2-x-1}{2x-2-2} \le 0$ $\dfrac{1-x}{x-2} \le 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2} \le 0 \Rightarrow x=1$	nemoguće
Konačno rješenje je $x \in [-1;0) \cup \{1\}$			

5. Riješiti jednačinu: $\left|3+i-2^{\left|1-|1-x|\right|}\right| = \sqrt{2}$

Rješenje

$$\left|3+i-2^{\left|1-|1-x|\right|}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(3-2^{\left|1-|1-x|\right|}\right)^2+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(3-2^{\left|1-|1-x|\right|}\right)^2+1=2 \Leftrightarrow$$

$$3-2^{\left|1-|1-x|\right|} = \pm 1 \Leftrightarrow \left(2^{\left|1-|1-x|\right|}=4\right) \vee \left(2^{\left|1-|1-x|\right|}=2\right) \Leftrightarrow \left(\left|1-|1-x|\right|=2\right) \vee \left(\left|1-|1-x|\right|=1\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(1-|1-x|=\pm 2\right) \vee \left(1-|1-x|=\pm 1\right) \Leftrightarrow \left(|1-x|=-1\right) \vee \left(|1-x|=3\right) \vee \left(|1-x|=-2\right) \vee \left(|1-x|=2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|1-x|=3\right) \vee \left(|1-x|=2\right) \Leftrightarrow \left(1-x=\pm 3\right) \vee \left(1-x=\pm 2\right) \Rightarrow x \in \{-2;-1;3;4\}$$

6.Za koje $t \in R$ jednačina $x(x+1)(x+2)(x+3) = \dfrac{25}{16}\left(\left|1-|1-t|\right|+2t\right)-1$ ima sva četiri rješenja realna?

Rješenje

Za početak posmatrajmo jednačinu $x(x+1)(x+2)(x+3)=a-1$ i uvedimo smjenu $x=y-\dfrac{3}{2}$(ova smjena je dozvoljena jer ako su rješenja po y realna tada su i rješenja po x realna) pa nova jednačina glasi: $\left(y-\dfrac{3}{2}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=a-1$ koja se dalje može pisati:

$\left(y^2-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-\frac{1}{4}\right)=a-1 \Leftrightarrow y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}=a-1 \Leftrightarrow y^2-\frac{5}{2}y^2+\frac{25}{16}-a=0$ .Ova bikvadratna jednačina će imati rješenja $y_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4\left(\frac{25}{16}-a\right)}}{2}}$ sva četiri realna ako je:

$$0\le\frac{25}{4}-4\left(\frac{25}{16}-a\right)\le\frac{25}{4} \Leftrightarrow 0\le 25-25+16a\le 25 \Leftrightarrow 0\le 16a\le 25 \Leftrightarrow 0\le a\le\frac{25}{16}$$

Ovo dalje znači:

$$0\le\frac{25}{16}\left(1-\left|1-|1-t|\right|+2t\right)\le\frac{25}{16} \Leftrightarrow 0\le\left|1-|1-t|\right|+2t\le 1$$

<table>
<tr><td>t</td><td colspan="4">-∞ 0 1 2 +∞</td></tr>
<tr><td>$|1-t|$</td><td colspan="2">1-t</td><td colspan="2">-1+t</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$0\le|1-1+t|+2t\le 1$
$0\le|t|+2t\le 1$</td><td colspan="2">$0\le|1+1-t|+2t\le 1$
$0\le|2-t|+2t\le 1$</td></tr>
<tr><td>$0\le -t+2t\le 1$</td><td>$0\le t+2t\le 1$
$t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$</td><td>$0\le 2-t+2t\le 1$
$-2\le t\le -1$
Nema rješenja</td><td>$0\le -2+t+2t\le 1$
$2\le 3t\le 3$
Nema rješenja</td></tr>
<tr><td colspan="5">Konačno rješenje je $t\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$</td></tr>
</table>

7.Za koje $t\in R$ je jedno rješenje jednačine $x^2-x|t|+2|1-t|-1=0$ u intervalu $(0;1)$?

Rješenje

Posmatrajmo funkciju $f(x)=x^2-x|t|+2|1-t|-1$ .Ako ova funkcija ima jednu nulu u intervalu $(0;1)$ onda je $f(0)\cdot f(1)<0$ pa treba riješiti nejednadžbu:

$$(2|1-t|-1)(-|t|+2|1-t|)<0$$

<table>
<tr><td>t</td><td colspan="7">-∞ 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 +∞</td></tr>
<tr><td>$|t|$</td><td>-t</td><td colspan="3">t</td><td colspan="3">t</td></tr>
<tr><td>$|1-t|$</td><td>1-t</td><td colspan="3">1-t</td><td colspan="3">-1+t</td></tr>
<tr><td>$2|1-t|-1$</td><td>1-2t</td><td colspan="3">1-2t</td><td colspan="3">2t-3</td></tr>
<tr><td>$2|1-t|-1$</td><td>+++++++++++++++</td><td>+++++</td><td colspan="2">-----------</td><td>--------</td><td colspan="2">++++++++++++</td></tr>
<tr><td>$-|t|+2|1-t|$</td><td>2-t</td><td colspan="3">2-3t</td><td colspan="3">t-2</td></tr>
<tr><td>$-|t|+2|1-t|$</td><td>+++++++++++++++</td><td colspan="2">+++++++++</td><td>-----</td><td colspan="2">------------------</td><td>++++++</td></tr>
<tr><td>$f(0)\cdot f(1)$</td><td>+++++++++++++++</td><td>+++++</td><td>----</td><td>+++</td><td>++++</td><td>-----</td><td>++++++</td></tr>
<tr><td colspan="8">Konačno rješenje je $t\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$</td></tr>
</table>

******moguće su štamparske greške******