Gaussova dosjetka

Branimir Dakić

Od anegdota o poznatim matematičarima možda je najčešće prepričavana ona o velikom matematičaru Karlu Friedrichu Gaussu, iz doba njegova djetinjstva: Jednom zgodom učitelj đacima dade u zadatak neka izračunaju zbroj prvih stotinu prirodnih brojeva. Očekivao je kako će ga djeca, zadubljena u rješavanje, neko dulje vrijeme ostaviti na miru, no nemalo se iznenadio kada je već nakon nekoliko trenutaka mali Gauss javio točan rezultat. A tek je rješenje na učitelja ostavilo poseban dojam. Gauss je brojeve združivao u parove: prvi s posljednjim, drugi s pretposljednjim i dalje tako redom. Takvih je parova 50:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (49 + 52) + (50 + 51),$$

a budući da je zbroj svakih dvaju članova u paru 101, konačan je rezultat jednak $50 \cdot 101$. Jednostavno, zar ne?!

Mogli bismo ovaj postupak i ovako provesti:

U jednom retku ispišemo brojeve od 1 do 100, a zatim ispod njih potpišemo iste brojeve, ali u obrnutom poretku, od 100 prema 1:

1	2	3	4	...	98	99	100
100	99	98	97	...	3	2	1
101	101	101	101	...	101	101	101

Zbrajanjem po dva broja što su jedan iznad drugoga dobit će se svaki put broj 101 i ako se sada izračuna $100 \cdot 101$, rezultat je dvaput veći od tražene sume. Dakle je:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 + 100 \cdot \frac{101}{2} = 50 \cdot 101 = 5\,050.$$

◆ ◆ ◆

Zadaci ovakve vrste na duhovit način, geometrijskom predodžbom, rješavani su još u staroj Grčkoj. Odredimo zbroj prvih n prirodnih brojeva.

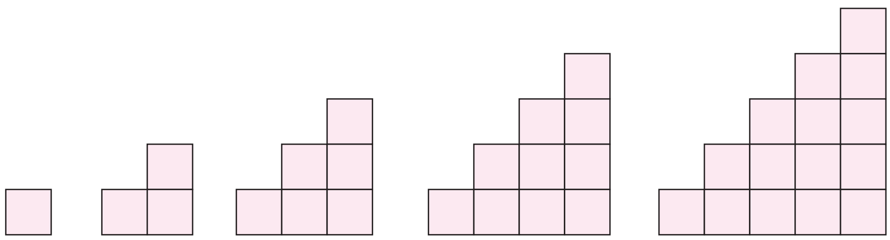
$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Kvadratićem ćemo prikazati broj 1, dvama kvadratićama broj 2, trima kvadratićima jedan do drugog bit će prikazan broj 3 i tako dalje.

Zbrajanje:

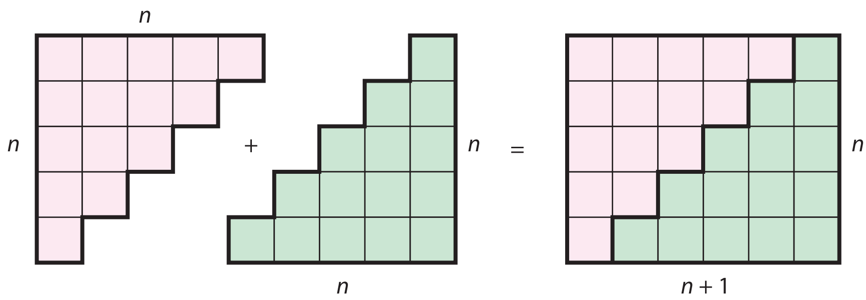
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

bit će slaganje kvadratića koji redom predočuju pojedine prirodne brojeve u oblik jednakokračnog pravokutnog trokuta s nazubljenom hipotenuzom.



1 1 + 2 1 + 2 + 3 1 + 2 + 3 + 4 1 + 2 + 3 + 4 + 5

U nekom, n-tom po redu takvom trokutu imat ćemo ukupno $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ kvadratića i zadatak se sveo na to da odgonetnemo taj broj, odnosno zbroj. Primijetimo da trokut na svakoj od kateta ima n kvadratića. Uzmimo dva takva trokuta, koji su sukladni, i spojimo ih duž hipotenuza:



Dobijemo pravokutnik koji se sastoji od $n(n+1)$ kvadratića, što je dvaput više od sume $1 + 2 + 3 + ... + n$.

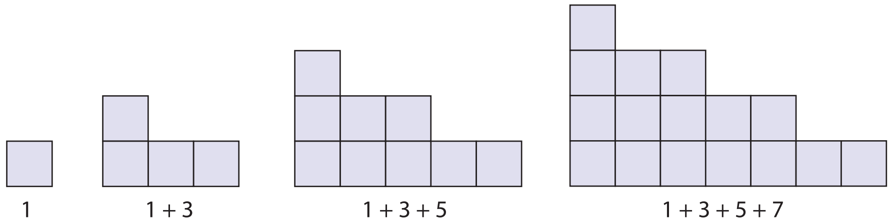
I tako smo došli do rezultata:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

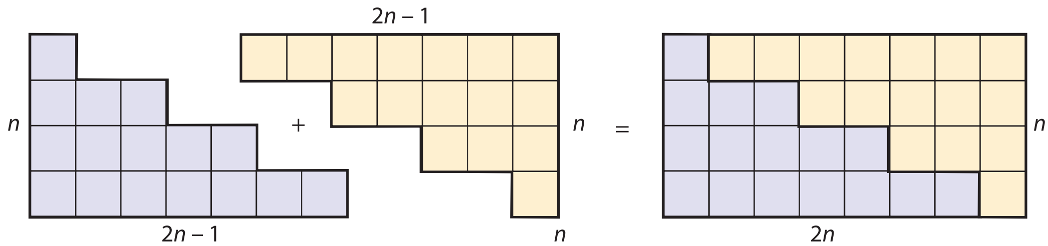
Želimo li sada odrediti zbroj prvih n uzastopnih neparnih prirodnih brojeva:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1),$$

postupit ćemo na sljedeći način. Pribrajanje ćemo zorno prikazati ovim sličicama:



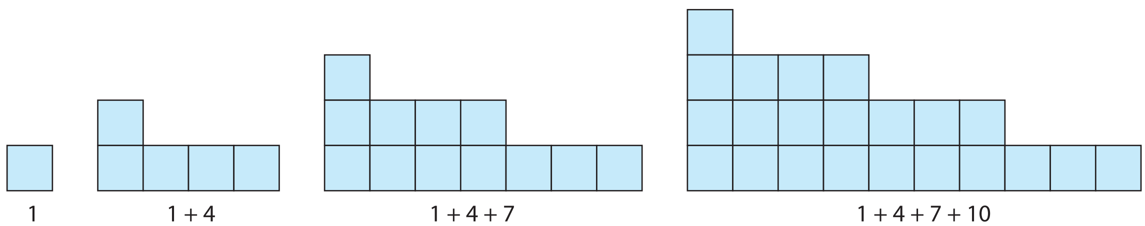
Postupajući zatim jednako kao i u prvom primjeru, dobit ćemo:

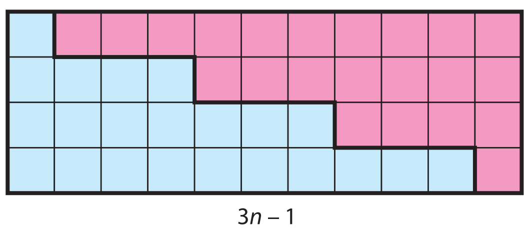


Konačno zaključujemo:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2.$$

Da bismo odredili zbroj $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2)$, za prirodni broj n, ponovit ćemo prethodni postupak:





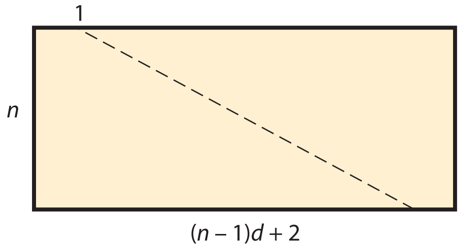
Zaključit ćemo: $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

Na način kako je to učinjeno u trima primjerima, može se odrediti zbroj bilo kojeg konačnog niza prirodnih brojeva u kojem je prvi član broj jedan, premda to i nije bitno, i u kojem je razlika $d = a_n - a_{n-1}$

dvaju susjednih članova stalna. Takav je niz, dakle, oblika:

$$1,\ 1 + d,\ 1 + 2d,\ 1 + 3d,\ ...$$

Induktivno zaključujemo da je opći član ovog niza $a_n = 1 + (n - 1)d$. Zbroj n članova takvog niza predočit će se trokutom kojem će uz jednu katetu biti naslagano n, a uz drugu $a_n = 1 + (n - 1)d$ kvadratića.



Zatim ćemo, jednako kao u primjerima, dva takva trokuta spojiti duž hipotenuze u pravokutnik koji će sadržavati ukupno $n[(n - 1)\mathrm{d} + 2]$ kvadratića, a to je dvostruko više negoli je zbroj koji tražimo. Zato je on:

$$S = \frac{n}{2}\left[(n - 1)d + 2\right].$$

Dobili smo tako opće rješenje iz kojega se onda jednostavno nalazi:

$$\text{za } d = 1 \quad 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{za } d = 2 \quad 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + n^2,$$

$$\text{za } d = 3 \quad 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2},$$

$$\text{za } d = 4 \quad 1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3) = n(2n - 1)$$

i tako dalje.

◆ ◆ ◆

Karl Friedrich Gauss, princ matematike – tako su ga zvali – u šali je govorio kako je naučio prije računati negoli govoriti.

Rodio se u Braunschweigu, u Njemačkoj, 1777. godine.

Zarana je iskazivao darovitost za matematiku o čemu svjedoče mnoge simpatične anegdote. Već kao devetnaestogodišnjak Gauss je riješio problem konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta povezujući ga s rješavanjem jednadžbe $x^{17} - 1 = 0$ u kvadratnim radikalima. Njemu se pripisuje i opće rješenje pitanja konstruktibilnosti pravilnog n-terokuta, gdje je n prost broj, ravnalom i šestarom te se takva konstrukcija može provesti ako je n oblika $2^{2^k} + 1$, za $k = 0, 1, 2, ...$

Gauss se bavio mnogim područjima matematike u kojima je dao vrhunske rezultate. U svojoj je doktorskoj disertaciji 1799. dokazao da svaka algebarska jednadžba s realnim koeficijentima ima korijen, što je teorem poznat kao *Osnovni teorem algebre*. Značajni su njegovi doprinosi teoriji brojeva, postavio je osnovne teorije ploha, jedan je od začetnika ideje o neeuklidskim geometrijama itd. Zanimao se i za astronomiju te je bio upravitelj zvjezdarnice.

Umro je 1855. u Göttingenu, u kojem je na sveučilištu proveo više od 50 godina svojega života.